Vektorgeometrie

Kugel und Kreis

Teil 1

Kugel - Grundlagen

Datei Nr. 65011

Stand 16. Juli 2009

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Das Thema Kugel steht nicht in allen Lehrplänen der Schulen, die Vektorrechnung betreiben sollen. Die meisten Grundkurse und sogar Leistungskurse behandeln die Kugelgleichung kaum bis gar nicht.

Dennoch muss man wissen, dass es eine große Menge an Aufgaben gibt, die dann auch im Abitur vorkommen können, bei denen es um das Thema Kugel geht. Die kann man dann aber lösen, ohne die Kugelgleichung verwenden zu müssen. Es sind also Anwendungs-Aufgaben der metrischen Vektorgeometrie.

Dazu gehören etwa Aufgaben wie: „Liegt ein Punkt auf einer Kugel, in ihrem Inneren oder außen? Berührt eine Gerade oder Ebene eine Kugel usw.

Daher gibt es auch in den Manuskripten zur Kugel einzelne Abschnitte, die ganz ohne die Kugelgleichung auskommen, und die eigentlich Pflichtübung sein müssen.

Inhalt

Datei 65011

Datei 65012

Datei 65013

Datei 65014

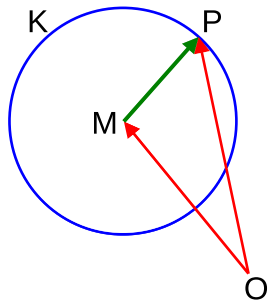
§ 1 Kugelgleichungen

1.1 Die Vektorgleichung

DEFINITION

Unter einer **Kugel** versteht man die Menge aller Punkte, die von einem festen Punkt M den gleichen Abstand r haben.

Liegen diese Punkte außerdem in einer Ebene nennt man die Punktmenge einen **Kreis**.



Hinweis: Spricht man demnach von einer Kugel oder einem Kreis, so meint man immer nur die **Kugel als Oberfläche** oder den Kreis als Linie.
Das Innere einer Kugel gehört demnach mathematisch gesehen nicht zur Kugel, dasselbe gilt für den Kreis. Hier unterscheiden sich Umgangssprache und Fachsprache!

Umsetzung der Definition in eine Gleichung:

Die Bedingung dafür, dass ein Punkt P auf der Kugel liegt, lautet somit: $d(M;P) = r$

Der Abstand eines Punktes P von einem Punkt M, dem Mittelpunkt, wird als Betrag des Vektors $\overrightarrow{MP}$ berechnet. Daher kann man diese Bedingung so schreiben:

. $$\left|\overrightarrow{MP}\right| = r$$

d.h. $$|\vec{x} - \vec{m}| = r$$

quadriert: $$|\vec{x} - \vec{m}|^2 = r^2$$

WISSEN: Die Definition des Betrags eines Vektors lautet so: $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{\vec{u}^2}$.

Durch Quadrieren folgt daraus: $\boxed{|\vec{u}|^2 = \vec{u}^2}$!!!

Merke also: **Wenn man den Betrag eines Vektors quadriert, erhält man dasselbe Ergebnis, als wenn man den Vektor skalar mit sich selbst multipliziert !**

Nur wenn man dies weiß, kann man weiter rechnen:

Aus $|\vec{x} - \vec{m}|^2 = r^2$ folgt also

$$\boxed{(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2} \quad (1)$$

Man nennt dies die vektorielle Kugelgleichung, wobei $\vec{m}$ der Ortsvektor des Kugelmittelpunktes M und r der Kugelradius ist.

BEISPIELE

(a) Der Mittelpunkt einer Kugel sei $M(3|1|-2)$, der Radius sei $r = 5$, dann lautet die Gleichung der

Kugel: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)^2 = 25$

b) $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]^2 = 40$ ist die Gleichung einer Kugel mit dem Mittelpunkt $M(1|0|-1)$ und dem Radius

$r = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

(c) $\vec{x}^2 = 49$ ist die Gleichung einer Kugel um den Ursprung $M(0|0|0) = O$ mit dem Radius $r = 7$.

(d) $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right]^2 = 64$ ist eine zweidimensionale „Kugel“:

Weil die z-Koordinaten fehlen, liegt die dargestellte Punktmenge in der x_1x_2-Ebene:
Es ist also die Gleichung eines Kreises um $M(4|-3)$ mit dem Radius 8.

1.2 Die Koordinatengleichung einer Kugel

WISSEN: Das ***Skalarprodukt*** wurde für ein kartesisches Koordinatensystem so definiert: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

Daraus folgt: $\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$

Damit kann man die Kugelgleichung in eine ganz andere Form bringen:

Man rechnet die linke Seite so um

$$(\vec{x}-\vec{m})^2 = \begin{pmatrix} x_1 - m_1 \\ x_2 - m_2 \\ x_3 - m_3 \end{pmatrix}^2 = (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2$$

und erhält dann:

$$\boxed{(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2}$$

BEISPIELE

(e) $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right]^2=16$ wird zu: $(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2=16$ mit Mittelpunkt $M(1|2|3)$ $r = 4$.

(f) $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-2\\5\\-8\end{pmatrix}\right]^2=50$ wird zu: $(x_1+2)^2+(x_2-5)^2+(x+8)^2=50$, $M(-2|5|-8)$ und $r=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

(g) $(x_1-3)^2+(x_2+7)^2+x_3^{\ 2}=81$ „ist" eine Kugel mit $M(3|-7|0)$ und $r=9$.

(h) $\boxed{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}=100}$ ist eine Kugel um den Ursprung $M(0|0|0)$ und $r = 10$.
Ihre Vektorgleichung lautet $\vec{x}^2=100$.

(i) $(x+3)^2+(y+5)^2+(z-12)^2=13$ ist eine Kugel um $M(-3|-5|12)$ und $r=\sqrt{13}$.

(j) $(x-t)^2+y^2+(x+2t)^2=16t^2$ ist eine Kugel mit dem Mittelpunkt $M_t(t|0|-2t)$ und dem Radius $r_t=\sqrt{16t^2}=4\cdot|t|$.

Für jeden Wert von t erhält man eine Kugel, weshalb die Gleichung eine Kugelschar darstellt.
ACHTUNG: Da nichts über t ausgesagt ist, könnte t auch negativ sein. Daher sind die **<u>Betragsstriche unbedingt erforderlich</u>**. MERKE: $\boxed{\sqrt{t^2}=|t|}$!!!

Die Koordinaten der Mittelpunkte hängen auch von t ab: $M_t(t|0|-2t)$.

Diese Mittelpunkte M_t liegen übrigens auf einer Geraden, was man so erkennt:

Man schreibt den Ortsvektor von M_t auf: $\vec{m}=\begin{pmatrix}t\\0\\-2t\end{pmatrix}$ und zerlegt ihn: $\vec{m}=t\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$

Dies ist die Gleichung einer Geraden. Man nennt sie die Ortskurve der Mittelpunkte.

(k) Gegeben sei $M(3|-3|-2)$ und $r = 15$. Die Koordinatengleichung der Kugel lautet dann:
$(x_1-3)^2+(x_2+3)^2+(x_3+2)^2=225$.
ACHTUNG: In den Klammern stehen stets die umgekehrten Vorzeichen!

(l) $(x_1+5)^2+x_2^{\ 2}+(x_3-2)^2=0$ stellt keine Kugel dar. Denn bei einem Radius $r = 0$ erfüllt nur der Mittelpunkt die Gleichung: $M(-5|0|2)$. Diese Gleichung stellt also nur einen Punkt dar.
Ich würde dies nicht mehr als Kugel bezeichnen wollen.

(m) $(x_1+5)^2+x_2^{\ 2}+(x_3-2)^2=-4$ stellt nur noch <u>die leere Menge</u> dar.

Denn aus $r^2=-4$ folgt keine reelle Zahl mehr.
Man kann auch so argumentieren: Die Summe dreier Quadratezahlen ist nie negativ!
Die Gleichung wird also von keinem Punktetripel gelöst.

1.3 Eine „schlimme“ Koordinatengleichung der Kugel

Wenn man die Gleichung $(x_1-2)^2+(x_2+6)^2+(x_3-5)^2=49$ ausmultipliziert,

dann entsteht diese Form: $x_1^2-4x_1+4+x_2^2+12x_2+36+x_3^2-10x_3+25=49$

Sortiert: $x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1+12x_2-10x_3+16=0$

Wenn eine Kugel durch eine solche Gleichung gegeben ist, kann man weder Mittelpunkt noch Radius ablesen. Es wird eine Rechnung notwendig, die diese Umformung rückgängig macht.
Das dazu benötigte Verfahren nennt man

Quadratische Ergänzung:

Gegeben ist: $x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1+12x_2-10x_3+16=0$

Sortieren:

$$(x_1^2-4x_1+\boxed{})+(x_2^2+12x_2+\boxed{})+(x_3^2-10x_3+\boxed{})=-16$$

$\boxed{:2}$ quadr. $\boxed{:2}$ quadr. $\boxed{:2}$ quadr.

Ziel: $(x_1-\boxed{2})^2 + (x_2-\boxed{6})^2 + (x_3-\boxed{5})^2=-16\ \boxed{+4+36+25}$

Ergebnis: $(x_1-2)^2+(x_2+6)^2+(x_3-5)^2=49$

Erklärung:

Der 1. Schritt besteht im Sortieren der Summanden. Das Absolutglied muss nach rechts.

Dann halbiert man die Koeffizienten der Terme ohne Quadrat, es sind die sog. Doppelten Produkte der binomischen Terme, die wir ansteuern. (Blaue Abwärtspfeile).

Deren Quadrate werden nun ergänzt (daher der Name des Verfahrens). Sie gehören als 3. Zahl in die Klammern (rote Pfeile aufwärts).

Wir dürfen sie aber nur dann hineinschreiben, wenn wie diese 3 Quadrate auch rechts ergänzen. Sonst liegt kein Gleichgewicht mehr vor !! Daher schreibt man sie erst in der 3. Zeile rechts an.

Und so sieht die ganze Rechnung normalerweise aus:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1+12x_2-10x_3+16=0$$

$$(x_1^2-4x_1)+(x_2^2+12x_2)+(x_3^2-10x_3)=-16$$

$$(x_1-2)^2+(x_2+6)^2+(x_3-5)^2=-16+4+36+25$$

$$(x_1-2)^2+(x_2+6)^2+(x_3-5)^2=49$$

Ergebnis: $M(2|-6|5)$ und $r=7$.

BEISPIELE

Usw.